



TITLE:

実在磁性流体の界面解析 (非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

水田, 洋

CITATION:

水田, 洋. 実在磁性流体の界面解析 (非線形波動現象の数理とその応用).
数理解析研究所講究録 2018, 2076: 20-31

ISSUE DATE:

2018-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/242070>

RIGHT:

実在磁性流体の界面解析

元 北海道大学大学院・工学研究院 水 田 洋

Yo Mizuta

Faculty of Engineering, Hokkaido University

1 はじめに

実在する磁性流体の界面現象，たとえば界面形状が臨界磁場近傍で急激に遷移する過程を実時間で解析するような場合，流体解析・磁場解析共に，**非線形効果**をできるだけ取り込んで信頼性を高めることが望まれる．

本研究ではこれまで，複雑な界面形状や任意の磁場分布を前提として，調和性と界面条件を厳密に満たす界面磁場を界面に限って求める**汎用磁場解析** [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] を開発し，Bernoulli 方程式から導いた**界面力学方程式** [5, 6, 8] により，界面安定性の分岐図式作成や波数スペクトルの時間変化など，界面現象の動的解析を行った [3, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14]．さらに，数値的に求めた**界面応力和**，**磁気応力差**の正当性を検証するため，「エネルギー保存則」，「界面応力と界面エネルギー密度の関係 (RELA)」を考察した [6, 7, 14, 15, 16, 17]．

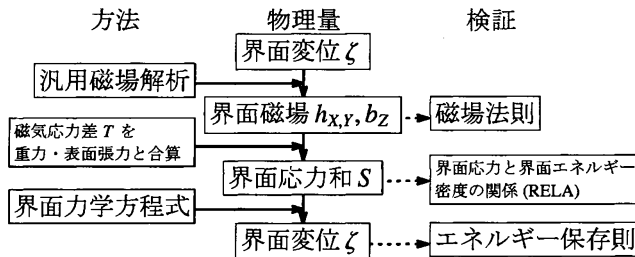


Fig. 1: 磁性流体界面現象の数値解析の手順と正当性の検証方法.

非線形効果は界面変位に対する界面磁場・界面応力和の非線形性を指すことが多いが，磁性流体に特有な効果として，**非線形磁化**がある [18]．磁性流体の磁場に対する応答は，磁場 H に依存する磁化 $M(H)$ によって考慮されるが，弱い磁場では磁化は磁場に比例して透磁率を定数とみなすことができ

る．しかし、磁場が強くなると磁化は飽和して磁場に比例しなくなり、透磁率 $\mu(H)$ は磁場の関数になる．これは、磁場と共に透磁率も場所ごとに变化することを意味する．

本論文では、これまでの流体解析、磁場解析、検証方法で用いてきた**界面力学方程式**、**3次元界面磁場方程式** および RELA に含まれる「Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係 (MRELA)」を導く過程を見直して、非線形磁化の場合に、これらがどのように変更されるかを調べる [19]．

2 非線形磁化と非線形透磁率

実在する磁性流体の磁場 H に対する応答は、磁化 M によって考慮され、多くの場合、磁化の磁場依存性は次のようになる [18]．

$$M = \frac{M}{H}H, H = |H|, M = |M|, M = M_S \left\{ \coth(\gamma H) - \frac{1}{\gamma H} \right\}, \gamma = \frac{3\chi_0}{M_S}. \quad (1)$$

ここで、 χ_0 は初期磁化率、 M_S は飽和磁化である．このとき透磁率 $\mu(H)$ は、磁束密度を $B = \mu_0(H + M) = \mu(H)H$ として、次のように求められる．

$$\mu(H) = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{M_S}{H} \left(\coth(\gamma H) - \frac{1}{\gamma H} \right) \right\}. \quad (2)$$

磁場が充分弱ければ透磁率 μ は定数 $\mu_0(1 + \chi_0)$ として扱えるが、透磁率が場所ごとに变化する磁場に依存する一般的な場合には、透磁率もまた場所の関数になる．

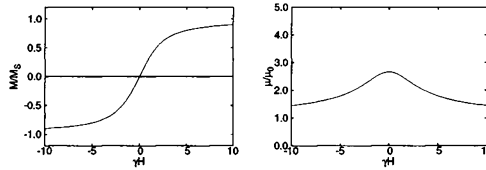


Fig. 2: 磁化 (左) と透磁率 (右) の典型的な磁場強度依存性 ($\gamma M_S = 5$).

3 界面力学方程式と Young-Laplace 方程式

非圧縮・非回転・非粘性の磁性流体の界面現象の解析には、次の界面力学方程式 (Equation for Interface Motion, EIM) を用いる [5, 6, 8]．

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S = f(t), \quad S \equiv D + G + C + T + p_0. \quad (3)$$

(3)はBernoulli方程式と界面上の力学的条件より導出され、界面形状に制限なく、全ての非線形効果を取り込んでいる。ここで、 $\rho, S, f(t), p_0$ は、密度・界面応力と・空間座標によらない関数・大気圧である。また、 $\zeta, \mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z), g, \gamma, \kappa_{1,2}$ を界面変位・流速・重力加速度・表面張力係数・界面の主曲率として、速度ポテンシャル φ ・動圧 D ・重力ポテンシャル G ・表面張力 C は、次のように表される。

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\zeta} dz v_z, \quad D = \frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} (\simeq 0 \text{ とする}), \quad G = \rho g z, \quad C = \gamma(\kappa_1 + \kappa_2). \quad (4)$$

界面における磁場 \mathbf{H} 、磁束密度 \mathbf{B} の法線成分を H_n, B_n 、接線成分を H_t, B_t 、大きさを H, B とし、界面を横切る値の跳び(流体-真空)を $[\dots]$ と表すとき、磁気応力差 T は、熱力学的考察から、流体・真空各領域に対する磁気応力の法線成分の差として、次のように導かれる[18]。

$$T = \left[H_n B_n - \int_0^H B dH \right]. \quad (5)$$

透磁率 μ_j が磁場に依存せず流体($j=1$)・真空($j=2$)各領域内で一様で、 $\mathbf{B}_j = \mu_j \mathbf{H}_j$ が成り立つ場合、(5)は(6)のように、法線磁束密度 B_n と接線磁場 H_t による、これまで用いてきた形になる。なお第2行は、法線界面条件 $B_{n1}=B_{n2}=B_n$ と接線界面条件 $H_{t1}=H_{t2}=H_t$ により書き換えている。

$$\begin{aligned} T &= \left[H_n B_n - \frac{\mu_j}{2} H^2 \right] = \left[H_n B_n - \frac{1}{2} (H_n B_n + H_t B_t) \right] = \frac{1}{2} [H_n B_n - H_t B_t] \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{\mu_j} \right] B_n^2 - [\mu_j] H_t^2 \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu_j} \right] (B_n^2 + \mu_1 \mu_2 H_t^2). \end{aligned} \quad (6)$$

透磁率が磁場に依存する一般の場合、 \mathbf{B}_j と \mathbf{H}_j の比例関係は前提とせず、 $\mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}_1), \mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2$ のように、磁束密度を磁化 \mathbf{M}_1 と $\mathbf{M}_2 (= \mathbf{0})$ で表しておく。さらに、法線界面条件 $[B_n] = \mu_0 [H_n + M_n] = 0$ と接線界面条件 $[H_t] = 0$ を用いれば、(5)は次のようなる。

$$\begin{aligned} T &= [H_n] B_n - \mu_0 \left[\int_0^H (H + M) dH \right] = [H_n] B_n - \frac{\mu_0}{2} [H^2] - \mu_0 \int_0^H [M] dH \\ &\quad \left(\begin{aligned} [H^2] &= [H_n^2 + H_t^2] = [H_n^2] = H_{n1}^2 - H_{n2}^2 = [H_n] (H_{n1} + H_{n2}), \\ 2B_n &= \mu_0 (H_{n1} + M_{n1}) + \mu_0 H_{n2} = \mu_0 (H_{n1} + H_{n2} + M_{n1}), \\ [H_n] &= -[M_n] = -M_{n1} = -M_n, \quad [M] = M \end{aligned} \right) \\ &= [H_n] B_n - \frac{\mu_0}{2} [H_n] \left(\frac{2B_n}{\mu_0} - M_{n1} \right) - \mu_0 \int_0^H [M] dH = -\frac{\mu_0}{2} M_n^2 - \mu_0 \int_0^H M dH. \end{aligned} \quad (7)$$

界面力学方程式 (3) の磁気応力差 T として (7) を用いれば, 非線形透磁率の場合の解析ができる. 特に $D = 0, \varphi = 0$ とすれば, 静止した磁性流体の界面形状を決める次の Young-Laplace 方程式が導かれる (p_0 は $f(t)$ に含める).

$$0 = -\rho g z - \gamma(\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 + \mu_0 \int_0^H M dH + f(t). \quad (8)$$

4 非線形透磁率における汎用磁場解析

汎用磁場解析 (Magnetic Analysis for General Use) では, 任意の界面形状と印加磁場分布の下で, 「調和性」と「界面条件」を満たす接線磁場 $h_{x,y}$ と法線磁束密度 b_z を求める. ここでは, これまで透磁率 μ_j が流体・真空各領域内で一様であることを前提としてきた汎用磁場解析を, 非線形磁化の場合へ拡張する.

S, V を閉曲面とその内部領域, \mathbf{r}, \mathbf{r}' を観測点とソース点とし, ソース点だけの関数や微分を $'$ で表せば, 2つの関数 ψ, ϕ' に対する Green の定理は

$$\iiint_V dV' (\phi' \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi') = \oint_S dS' \cdot \{\phi' (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi')\}. \quad (9)$$

透磁率が $\mu(H(\mathbf{r})) = \mu(\mathbf{r}) = \mu'$ と磁場を通じて場所の関数となることを考慮して, (9) を次のように拡張する (これは Gauss の定理を用いて示される).

$$\iiint_V dV' \{\phi' \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \psi) - \psi \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \phi')\} = \oint_S dS' \cdot \{\phi' (\mu' \nabla' \psi) - \psi (\mu' \nabla' \phi')\}. \quad (10)$$

ここで, ψ として 3次元 Poisson 方程式 $\nabla' \cdot (\mu' \nabla' \psi) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の基本解を, ϕ' として $\mathbf{h}' = \nabla' \phi', \mathbf{b}' = \mu' \mathbf{h}'$ のように磁場と磁束密度を導き Gauss の法則

$\nabla' \cdot \mathbf{b}' = \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \phi') = 0$ を満たす磁気ポテンシャルを選ぶ. また, S 上にある観測点 \mathbf{r} に対し $\iiint_V dV' \nabla' \cdot (\mu' \nabla' \psi) = 1/2$ を考慮すれば, (10) は次の (11) となる.

さらに, 面積素 dS' と法線単位ベクトル \mathbf{t}'_z で面積素ベクトルを $d\mathbf{S}' = dS' \mathbf{t}'_z$ と表し, 法線磁束密度を $\mu' \mathbf{t}'_z \cdot \nabla' \phi' = \mathbf{t}'_z \cdot \mu' \mathbf{h}' = b'_z$ と置けば, (13) が導かれる.

$$\phi = 2 \oint_S dS' \cdot \{-\psi (\mu' \nabla' \phi') + (\mu' \nabla' \psi) \phi'\} \quad (11)$$

$$= 2 \oint_S dS' \cdot \{-\psi (\mu' \mathbf{t}'_z \cdot \nabla' \phi') + (\mu' \mathbf{t}'_z \cdot \nabla' \psi) \phi'\} \quad (12)$$

$$= 2 \oint_S dS' \cdot \{-\psi b'_z + (\mu' \mathbf{t}'_z \cdot \nabla' \psi) \phi'\}. \quad (13)$$

なお、接線単位ベクトル $\mathbf{t}_{X,Y}$ 、法線単位ベクトル \mathbf{t}_Z をまとめて \mathbf{t}_I ($I=X,Y,Z$) と表し、 S 上の観測点 \mathbf{r} において (13) の両辺に $\mathbf{t}_I \cdot \nabla$ を演算すれば、

$$\mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi = 2 \oint_S dS' \{ -(\mathbf{t}_I \cdot \nabla \psi) b'_Z + (\mathbf{t}_I \cdot \nabla)(\mu' \mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi' \}. \quad (14)$$

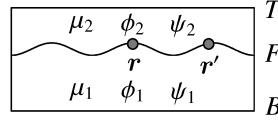


Fig. 3: 流体領域 1・真空領域 2 における 3 次元 Poisson 方程式の基本解 $\psi_{1,2}$ 、磁気ポテンシャル $\phi_{1,2}$ 、観測点 \mathbf{r} 、ソース点 \mathbf{r}' 、上方境界 T 、下方境界 B および界面 F 。

Fig. 3 に示す流体・真空各領域ごとに、磁気ポテンシャル方程式 (13) と勾配方程式 (14) を示せば、次のようになる。

$$\begin{cases} \phi_2 = 2 \iint_F dS' \left\{ -\psi \frac{b'_{Z2}}{\mu'_2} - (\mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'_2 \right\} + T, \\ \phi_1 = 2 \iint_F dS' \left\{ -\psi \frac{b'_{Z1}}{\mu'_1} + (\mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'_1 \right\} + B, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi_2 = 2 \iint_F dS' \left\{ -(\mathbf{t}_I \cdot \nabla \psi) \frac{b'_{Z2}}{\mu'_2} - (\mathbf{t}_I \cdot \nabla)(\mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'_2 \right\} + \mathbf{t}_I \cdot \nabla T, \\ \mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi_1 = 2 \iint_F dS' \left\{ -(\mathbf{t}_I \cdot \nabla \psi) \frac{b'_{Z1}}{\mu'_1} + (\mathbf{t}_I \cdot \nabla)(\mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'_1 \right\} + \mathbf{t}_I \cdot \nabla B. \end{cases} \quad (16)$$

S 上の面積分には界面 F ・上方境界 T ・下方境界 B からの寄与があるが (遠方側面は無視する)、ここでは F だけをあらわに示し、それ以外は次のように置いている。

$$\begin{cases} T \equiv 2 \iint_T dS'_2 \cdot \{ -\psi_2 (\mu'_2 \nabla' \phi'_2) + (\mu'_2 \nabla' \psi_2) \phi'_2 \}, \\ B \equiv 2 \iint_B dS'_1 \cdot \{ -\psi_1 (\mu'_1 \nabla' \phi'_1) + (\mu'_1 \nabla' \psi_1) \phi'_1 \}. \end{cases} \quad (17)$$

F 上の法線磁束密度は領域ごとに $b_{Z1} = \mathbf{t}_{Z1} \cdot \mu_1 \nabla \phi_1$, $b_{Z2} = \mathbf{t}_{Z2} \cdot \mu_2 \nabla \phi_2$ と定義するが、法線単位ベクトルは互いに逆向きで、 $\mathbf{t}'_{Z1} = \mathbf{t}'_Z$, $\mathbf{t}'_{Z2} = -\mathbf{t}'_Z$ となる。Poisson 方程式 $\nabla' \cdot (\mu'_j \nabla' \psi_j) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の基本解も領域ごとに区別するが、 $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, $\psi = -1/4\pi R$ により $\nabla' \psi_j = \nabla' \psi / \mu'_j$ とできるならば、次の関係が成り立つ。

$$\mu'_1 \nabla' \psi_1 = \mu'_2 \nabla' \psi_2 = \nabla' \psi = -\nabla \psi = \frac{\mathbf{R}}{4\pi R^3}. \quad (18)$$

ここで、3次元 Hilbert 変換演算子

$$\begin{aligned}\hat{G}_{1I}f' &\equiv 2 \iint_F dS' e'_1, \quad e'_1 \equiv -(t_I \cdot \nabla \psi) f', \\ \hat{G}_{2I}f' &\equiv 2 \iint_F dS' e'_2, \quad e'_2 \equiv (t_I \cdot \nabla)(t'_Z \cdot \nabla' \psi) f'\end{aligned}\quad (19)$$

を定義すれば、勾配方程式 (16) は次のように簡潔に表される。

$$\begin{cases} t_I \cdot \nabla \phi_2 = \hat{G}_{1I} \left(b'_{Z2} / \mu'_2 \right) - \hat{G}_{2I} \phi'_2 + t_I \cdot \nabla T, \\ t_I \cdot \nabla \phi_1 = \hat{G}_{1I} \left(b'_{Z1} / \mu'_1 \right) + \hat{G}_{2I} \phi'_1 + t_I \cdot \nabla B. \end{cases}\quad (20)$$

界面上では、

$$\text{法線界面条件: } b_{Z1} = -b_{Z2} = b_Z, \quad \text{接線界面条件: } \phi_1 = \phi_2 = \phi \quad (21)$$

が成り立つ。これを考慮しながら (20) の両領域の式を加え合わせれば、右辺第2項同士は接線界面条件で打ち消しあって、

$$t_I \cdot \left(\frac{b_1}{\mu_1} + \frac{b_2}{\mu_2} \right) = -2\hat{G}_{1I}(M'b'_Z) + t_I \cdot \nabla(T + B). \quad (22)$$

ただし、左辺は磁束密度ベクトル $b_j = \mu_j \nabla \phi_j$ で置き換え、右辺では $M' \equiv (1/\mu'_2 - 1/\mu'_1)/2$ を定義した。

ここで、 b_j を、両領域の界面が存在する前に与える基本場 b_j^0 と、それからのずれである誘導場 $b_j^1 = b_j - b_j^0$ に分離する。基本場に対しては $M'=0$ なので、(22) は

$$t_I \cdot \left(\frac{b_1^0}{\mu_1} + \frac{b_2^0}{\mu_2} \right) = t_I \cdot \nabla(T^0 + B^0) \quad (23)$$

となる。誘導場は、(22) から (23) を差し引いた、次の誘導場方程式

$$t_I \cdot \left(\frac{b_1^1}{\mu_1} + \frac{b_2^1}{\mu_2} \right) = -2\hat{G}_{1I}[M'b'_Z] + t_I \cdot \nabla(T^1 + B^1) \quad (24)$$

から求める。ただし、 $T^1 \equiv T - T^0$, $B^1 \equiv B - B^0$ と置いた。

既知の外部印加磁場を h^0 、磁束密度の基本場を $b_j^0 = \mu_j h^0$ とし、 $P \equiv (1/\mu_2 + 1/\mu_1)/2$ を定義する。 $b_Z, h_{X,Y}$ の基本場を $b_Z^0 = t_Z \cdot h^0 / P$, $h_{X,Y}^0 = t_{X,Y} \cdot h^0$ と選ぶとき、関係 $b_j = b_j^0 + b_j^1$, $t_Z \cdot b_j = b_Z = b_Z^0 + b_Z^1$, $t_{X,Y} \cdot b_j / \mu_j = h_{X,Y} = h_{X,Y}^0 + h_{X,Y}^1$ と界面条件 $[b_Z] = 0$, $[h_{X,Y}] = 0$ より、界面に対する b_j^1 の各方向成分は、 $b_Z, h_{X,Y}$ の誘導場 $b_Z^1, h_{X,Y}^1$ で次のように表される (復号の上/下は領域 1/2 に対応) [5].

$$t_Z \cdot b_j^1 = b_Z^1 \mp \mu_j M b_Z^0, \quad t_{X,Y} \cdot b_j^1 = \mu_j h_{X,Y}^1. \quad (25)$$

(24)に(25)を用いれば、次の3次元界面磁場方程式が導かれる。

$$\begin{cases} Pb_Z^1 = -\hat{G}_{1Z} [M' (b_Z^{0'} + b_Z^{1'})] + t_Z \cdot g, \\ h_{X,Y}^1 = -\hat{G}_{1X,1Y} [M' (b_Z^{0'} + b_Z^{1'})] + t_{X,Y} \cdot g. \end{cases} \quad (26)$$

ただし、 $g \equiv \nabla(T^1 + B^1)/2$ を定義した。

透磁率が磁場の強さによらず各領域内で一樣な場合は、 $M'=M$ を演算子 \hat{G}_{1I} ($I=X,Y,Z$) の前に出すことができる。さらに、誘導場を含む項を左辺に集めると、これまで用いてきた、有限厚さ領域における3次元界面磁場方程式[5]となる (\hat{G}_I は上の \hat{G}_{1I} に一致している)。

$$\begin{cases} (P + M\hat{G}_Z)b_Z^1 = -M\hat{G}_Z b_Z^0 + t_Z \cdot g, \\ h_{X,Y}^1 + M\hat{G}_{X,Y}b_Z^1 = -M\hat{G}_{X,Y}b_Z^0 + t_{X,Y} \cdot g. \end{cases} \quad \left(\hat{G}_I f' \equiv 2t_I \cdot \iint_F dS' (\nabla' \psi) f' \right) \quad (27)$$

なお、流体領域・真空領域の磁束密度 $B_1 = \mu_0(H_1 + M_1) = \mu_1 H_1$, $B_2 = \mu_0 H_2$ および法線界面条件 $[B_n] = 0$ ・接線界面条件 $[H_t] = 0$ より、(7),(8)の磁化 M の成分は、(26),(27)で求めた界面磁場 B_n, H_t ($b_Z, h_{X,Y}$) から以下の関係を用いて求められることが示される。

$$M_n = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right) B_n, \quad M_t = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1 \right) H_t. \quad (28)$$

5 界面応力と界面エネルギー密度の関係 (RELA)

界面力学方程式(3)において、ある任意の界面変位 ζ で数値的に求めた界面応力が物理的に正しいことを確かめるには、 $S(\zeta), G(\zeta), C(\zeta), T(\zeta)$ とは別に、それぞれの界面応力に対応する界面エネルギー密度 $U(\zeta), U_G(\zeta), U_C(\zeta), U_T(\zeta)$ (Flat Spaceにおける単位面積当たりのエネルギー) を求められるようにしておき、 $\delta\zeta$ を微小として、次の「界面応力と界面エネルギー密度の関係 (RELA)」を用いる [7, 17]。

$$\begin{aligned} U(\zeta + \delta\zeta) - U(\zeta) &\equiv \delta U = S(\zeta)\delta\zeta, & U(\zeta) &= U_G(\zeta) + U_C(\zeta) + U_T(\zeta), \\ \delta U_G &= G(\zeta)\delta\zeta, & U_G(\zeta) &= \rho g \zeta^2 / 2, \\ \delta U_C &= C(\zeta)\delta\zeta, & U_C(\zeta) &= \gamma \sqrt{1 + (\nabla\zeta)^2}, \\ \delta U_T &= T(\zeta)\delta\zeta, & U_T(\zeta) &= U_{T1}(\zeta) + U_{T2}(\zeta). \end{aligned} \quad (29)$$

ここで U_{T1}, U_{T2} は、流体・真空それぞれの領域の磁気界面エネルギー密度である。微小変位 $\delta\zeta_1, \delta\zeta_2$ による U_{T1}, U_{T2} の変化の割合 (実はMaxwell 応力) を T_1, T_2 とすれば、 $\delta U_{T1} = T_1 \delta\zeta_1, \delta U_{T2} = T_2 \delta\zeta_2$ である。 $\delta\zeta_1, \delta\zeta_2$ は大きさが同

じで互いに逆向きなので $\delta\zeta_1 = -\delta\zeta_2 = \delta\zeta$ と置けば, $\delta U_T = T\delta\zeta = \delta U_{T1} + \delta U_{T2}$ より 磁気応力差は $T = T_1 - T_2$ となる. 以下では, 流体領域で, 「Maxwell 応力と 磁気界面エネルギー密度の関係 (MRELA)」 $\delta U_{T1} = T_1\delta\zeta_1$ を考える.

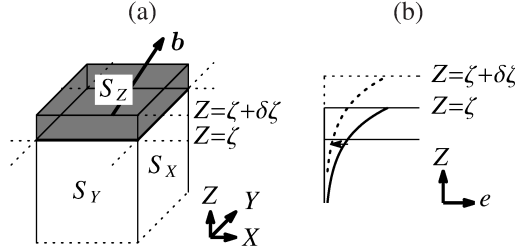


Fig. 4: (a)Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関係を導くための角柱領域, (b) 界面移動に伴う e の変化 (矢印).

Fig. 4(a) のような, Flat Space の流体側に界面と垂直方向に無限に伸びた角柱領域において, 磁気界面エネルギー密度は

$$U_{T1} = \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \frac{e(X, Y, Z)}{2}, \quad e \equiv \mathbf{h} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + h_z b_z, \quad (30)$$

となる. ここで, ζ は界面の高さ, S_Z は角柱の断面積, $\mathbf{h} = (h_X, h_Y, h_Z)$ は磁場ベクトル, $\mathbf{b} = (b_X, b_Y, b_Z)$ は磁束密度ベクトルである.

次に, ζ を $\delta\zeta$ だけ変えたときの U_{T1} の変化は, $\delta\zeta$ による物理量の変化を δ で表せば, (31) のように角柱の体積変化 (括弧内第 1 項) と e 自身の変化 (括弧内第 2 項) の和となる.

$$\delta U_{T1} = \delta \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \frac{e(X, Y, Z)}{2} = \frac{1}{2} \left\{ e(X, Y, \zeta) \delta\zeta + \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \delta e(X, Y, Z) \right\}. \quad (31)$$

界面が e の分布との関係を変えることなく $Z = \zeta$ から $Z = \zeta + \delta\zeta$ まで動く場合, 固定した観測点における e の変化は (32) のように表される (e に対する微分形の連続の方程式, Fig. 4(b) 矢印参照). その成分表示 (33) を (34) のように書き直し, Ampère の法則 $\partial h_X / \partial Z = \partial h_Z / \partial X$, $\partial h_Y / \partial Z = \partial h_Z / \partial Y$ と Gauss の法則 $\partial b_X / \partial X + \partial b_Y / \partial Y + \partial b_Z / \partial Z = 0$ を適用すれば, (35) または (36) となる. ここで, $\nabla_2 = (\partial / \partial X, \partial / \partial Y, 0)$ は接線方向偏微分である.

$$\delta e = -\delta\zeta \cdot \nabla e = -\delta\zeta \frac{\partial}{\partial Z} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{b}) \quad (\delta\zeta = \delta\zeta Z) \quad (32)$$

$$= -\delta\zeta \left(b_X \frac{\partial h_X}{\partial Z} + b_Y \frac{\partial h_Y}{\partial Z} + b_Z \frac{\partial h_Z}{\partial Z} + h_X \frac{\partial b_X}{\partial Z} + h_Y \frac{\partial b_Y}{\partial Z} + h_Z \frac{\partial b_Z}{\partial Z} \right) \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
&= -\delta\zeta \left\{ \begin{aligned} &b_X \left(\frac{\partial h_X}{\partial Z} + \frac{\partial h_Z}{\partial X} \right) + 2h_X \frac{\partial b_X}{\partial Z} - b_X \frac{\partial h_Z}{\partial X} - 2h_Z \frac{\partial b_X}{\partial X} - b_X \frac{\partial h_X}{\partial Z} \\ &+ b_Y \left(\frac{\partial h_Y}{\partial Z} + \frac{\partial h_Z}{\partial Y} \right) + 2h_Y \frac{\partial b_Y}{\partial Z} - b_Y \frac{\partial h_Z}{\partial Y} - 2h_Z \frac{\partial b_Y}{\partial Y} - b_Y \frac{\partial h_Y}{\partial Z} \\ &+ 2h_Z \left(\frac{\partial b_X}{\partial X} + \frac{\partial b_Y}{\partial Y} + \frac{\partial b_Z}{\partial Z} \right) \\ &+ b_X \frac{\partial h_X}{\partial Z} - h_X \frac{\partial b_X}{\partial Z} + b_Y \frac{\partial h_Y}{\partial Z} - h_Y \frac{\partial b_Y}{\partial Z} + b_Z \frac{\partial h_Z}{\partial Z} - h_Z \frac{\partial b_Z}{\partial Z} \end{aligned} \right\} \quad (34) \\
&= -2\delta\zeta \left\{ \frac{\partial(b_X h_X)}{\partial Z} + \frac{\partial(b_Y h_Y)}{\partial Z} - \frac{\partial(b_X h_Z)}{\partial X} - \frac{\partial(b_Y h_Z)}{\partial Y} + \frac{\Delta}{2} \right\} \\
&\quad \left(\Delta \equiv b_X \frac{\partial h_X}{\partial Z} - h_X \frac{\partial b_X}{\partial Z} + b_Y \frac{\partial h_Y}{\partial Z} - h_Y \frac{\partial b_Y}{\partial Z} + b_Z \frac{\partial h_Z}{\partial Z} - h_Z \frac{\partial b_Z}{\partial Z} \right) \quad (35)
\end{aligned}$$

$$= -2\delta\zeta \left(\frac{\partial(h_2 \cdot b_2)}{\partial Z} - \nabla_2 \cdot (h_Z b_2) + \frac{\Delta}{2} \right). \quad (36)$$

(31)の括弧内第2項に(36)を用い、項の組み換えを行うと、 δU_{T1} は、(40)の T_1 と(42)の T'_1 により、(38)のように表される。

$$\delta U_{T1} = \frac{\delta\zeta}{2} \left\{ e(X, Y, \zeta) - 2 \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \left(\frac{\partial(h_2 \cdot b_2)}{\partial Z} - \nabla_2 \cdot (h_Z b_2) + \frac{\Delta}{2} \right) \right\} \quad (37)$$

$$= (T_1 + T'_1) \delta\zeta. \quad (38)$$

(40)について、 $Z=\zeta$ における h_2, b_2, h_Z, b_Z の値を $h_{20}, b_{20}, h_{Z0}, b_{Z0}$ と表せば、 $e(X, Y, \zeta) = h_{20} \cdot b_{20} + h_{Z0} b_{Z0}$ 、および、法線方向積分は $\int_{-\infty}^{\zeta} dZ \partial(h_2 \cdot b_2) / \partial Z = h_{20} \cdot b_{20}$ となる(角柱下面では $h_2 \cdot b_2 = 0$ とする)。最後に、透磁率が磁場に依存しない場合、 $b = \mu_1 h$ および $\Delta = 0$ から(41)が導かれる。

$$T_1 \equiv \frac{1}{2} \left\{ e(X, Y, \zeta) - 2 \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \left(\frac{\partial(h_2 \cdot b_2)}{\partial Z} + \frac{\Delta}{2} \right) \right\} \quad (39)$$

$$= \frac{1}{2} \left(h_{Z0} b_{Z0} - h_{20} \cdot b_{20} - \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \Delta \right) \quad (40)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{b_{Z0}^2}{\mu_1} - \mu_1 |h_{20}|^2 \right). \quad (41)$$

(6)の磁気応力差は、(41)とこれと同様の T_2 を $T = T_1 - T_2$ に用いて得られる。

(42)については、右辺全体を(43)のように断面内平均で置き換えてから、Gaussの定理の2次元版 $\iint_{S_Z} dS_Z \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \nabla_2 \cdot \mathbf{A} = \iint_{S_2} dS_2 \cdot \mathbf{A}$ を用いて、角柱側

面 (Fig. 4(a) の S_X, S_Y) にわたる積分 $\iint_{S_2} d\mathbf{S}_2$ に書き換える. (44) より T'_1 は, 角柱側面における接線応力に基づく磁気エネルギーの漏洩, と解釈できる.

$$T'_1 \equiv \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \nabla_2 \cdot (h_Z \mathbf{b}_2) \quad (42)$$

$$\rightarrow \frac{1}{S_Z} \iint_{S_Z} dS_Z \int_{-\infty}^{\zeta} dZ \nabla_2 \cdot (h_Z \mathbf{b}_2) \quad (43)$$

$$= \frac{1}{S_Z} \iint_{S_2} d\mathbf{S}_2 \cdot (h_Z \mathbf{b}_2). \quad (44)$$

(29) とは異なり, (38) では δU_{T1} に T'_1 からの寄与が含まれる. 前報 [17] でモデル磁場を用いた検討によれば, $\delta U_{T1} = T_1 \delta \zeta$ が保たれるのは, 磁場分布が一様に近かったり, U_{T1}, T_1 を周期境界条件を伴う断面内平均で扱う場合であり, 領域の厚さや磁場分布の変化が大きくなれば, T'_1 の寄与が際立ってくる. これまで T'_1 が問題とならなかったのは, MRELA を専ら一様な磁場分布中の局所的な領域で用いていたため, と考えられる. したがって, 実際に界面応力の検証に MRELA を用いる際には, T'_1 の評価も必要になる.

なお (38) は, ほとんど前報に沿って導出しているが, 非線形磁化の場合にも適用できるように, $\mathbf{e}(X, Y, Z) \equiv \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ の代わりに (30) から始めて, その後, \mathbf{b} と \mathbf{h} を独立に扱っている. その結果, 4 で表される新たな項を確認した.

6 まとめ

磁性流体の界面解析を実在現象により近づけるため, これまで用いてきた流体解析, 磁場解析, 解析結果の検証方法が, 非線形磁化の場合にどのように変更されるかを調べた.

流体解析では, 界面力学方程式が従来知られている Young-Laplace 方程式になることを示した. 磁場解析では, 磁場を通して場所の関数となる透磁率も 3 次元 Hilbert 変換演算子の演算対象に含めておけばよいことを確認した.

解析結果の検証には, 界面力学方程式の時間積分で求めた界面変位はエネルギー保存則を, それに用いた界面応力は「界面応力と界面エネルギー密度の関係 (RELA)」を用いるが, 本論文では, RELA に含まれ無電流実空間で磁気応力差の検証に使える「Maxwell 応力と磁気界面エネルギー密度の関

係 (MRELA)」を中心に調べた。界面の微小変化に伴う磁気界面エネルギー密度の変化には、主たる法線応力からの寄与に加え、接線応力からの寄与もあり、こちらは領域の厚さや磁場分布の変化と共に大きくなる。さらに、非線形磁化による新たな効果を見出した。

汎用磁場解析で求めた界面磁場は、界面上の離散点だけで求められている。このような事情を考慮しながら、引き続き数値解析条件を調べていく。また、非線形磁化による飽和磁化は、過剰な磁場の作用を抑制する。今後、非線形磁化の有無による磁気応力差の違いなどを数値的に比較していきたい。

参考文献

- [1] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1483** (2006), pp.175–187.
- [2] Mizuta, Y., *Magnetohydrodynamics*, **44-2** (2008), pp.155–165.
- [3] Mizuta, Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **323-10** (2011), pp.1354–1359.
- [4] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2012 講演論文集 (2012) (CD-ROM).
- [5] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用」, **1847** (2013), pp.96–106.
- [6] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1890** (2014), pp.113–123.
- [7] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」, **1989** (2016), pp.150–160.
- [8] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2013 講演論文集 (2013) (CD-ROM).
- [9] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2010 拡張要旨集 (2010) (CD-ROM).
- [10] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の多様性と普遍性」, **1761** (2011), pp.163–176.
- [11] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の研究の新たな進展」, **1800** (2012), pp.203–215.
- [12] Mizuta, Y., *Magnetohydrodynamics*, **49-2–4** (2013), pp.191–195.
- [13] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2014 講演論文集 (2014) (CD-ROM).
- [14] Mizuta, Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **431** (2017), pp.209–213.
- [15] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象のメカニズムと数理」, **1946** (2015), pp.48–58.

- [16] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2015 講演論文集 (2015) (CD-ROM).
- [17] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」, **2034** (2017), pp.139–149.
- [18] Rosensweig, R.E., *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985), Chap.4, Chap.5.
- [19] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2017 講演論文集 (2017) (CD-ROM).